Тарабукина И. А.

Решение прикладных задач по теме «Приближённые вычисления» в средних профессиональных учебных заведениях

Аннотация. *В статье описан опыт применения и решение некоторых прикладных задач на уроках математики для студентов специальностям первого года обучения. Предлагаются варианты практических работ по данной теме.*

Ключевые слова: *цели математического образования, прикладная задача, примеры прикладных задач по алгебре профильной направленности.*

Математике всегда принадлежало одно из ведущих в системе наук. Замечательные слова «Наука только тогда достигает совершенства, когда ей удаётся пользоваться математикой» - особенно актуально сейчас, в период интенсивной математизации не только большинства областей наук, но и других видов практической деятельности человека. И это не удивительно, так как математика и её методы используются инженерами, физиками, экономистами, биологами, криминалистами, специалистами сельского хозяйства, организаторами производства.

Надо ли учить студентов решать прикладные задачи с физическим, техническим, экономическим содержанием? С одной стороны, законы математики обязательны для всех наук. Круг её приложений настолько широк, что всё равно не удастся рассмотреть их в достаточной полноте. С другой стороны, математика черпает идеи для своего дальнейшего развития именно из приложений.

Современная педагогика видит три цели математического образования:

Первая - общеобразовательная. Без математики невозможно понять ряд других предметов, нельзя продолжить образование в вузе по многим специальностям.

Вторая цель - прикладная. Необходимость изучения принципов математического моделирования каких – либо реальных процессов.

Третья цель – воспитательная. Математика развивает логическое, пространственное алгоритмическое мышление; формирует такие качества, как трудолюбие, настойчивость, усидчивость, учит ценить красоту мысли.

Основная задача предмета «Математика» для средних профессиональных учебных заведений связана со всеми тремя названными целями: общеобразовательной, прикладной (будущий специалист получает необходимые навыки прикладного математического исследования), воспитательной (для формирования научного мировоззрения и развития логического мышления).

Когда говорят о прикладной задаче, имеют в виду приложение определённого раздела науки к внешней предметной области. При решении практических задач часто приходиться иметь дело с приближёнными значениями различных величин. К ним относятся: результаты измерения различных величин с помощью приборов; результаты подсчётов большого количества предметов. Например: число жителей в городе; значения, полученные при измерениях на графиках, диаграммах, номограммах; проектные данные, нормируемые ГОСТа – ми; табличные значения некоторых математических величин; результаты вычисления значений функций.

При вычислениях с приближёнными числами важно знать отклонение приближённого значения величины от её точного значения, для чего вводятся понятие *абсолютной погрешности приближения*

Абсолютной погрешностью Δ (дельта) приближения называется модуль разности между точными значениями величина ***a*** и её приближенным значением ***x***, т.е. $|a - x| = \Delta$

Например, абсолютная погрешность приближения 0,44 числа 4/9 составляет

$$\Delta = |4/9 – 0{,}44| = |4/9 – 11/25| = |100\text{-}99/225| = 1/225$$

На практике во многих случаях точное значение величины бывает неизвестно, поэтому абсолютную погрешность приближения найти нельзя.

Однако можно дать оценку абсолютной погрешности, если известны приближения с избытком и с недостатком.

Если $|a - x| \le h$, или $x - h \le a \le x + h$, то говорят, что число а равно числу х с точностью до h, и пишут $a = x \pm h$. Положительное число h называют границей ***абсолютной погрешности*** приближения.

Например, отношение длины окружности к её диаметру равно иррациональному числу

π = 3,14159… Найдём границу абсолютной погрешности общепринятого приближения числа π числом 3,14.

$$\Delta = |3{,}14159\ldots - 3{,}14| = 0{,}00159\ldots$$

За границу абсолютной погрешности приближения можно взять любое число большее числа 0,00159, Например, 0,002, 0,005, 0,01.

Замечание. Граница абсолютной погрешности измерения обычно устанавливается по наименьшему делению прибора (будильник показывает время с точностью до 1 минуты, наручные часы с секундной стрелкой показывают время с точностью до 1 секунды).

Цифра ***a*** называется ***верной,*** если граница абсолютной погрешности данного приближения не превосходит единицы того разряда, в котором записана цифра ***a***

В противном случае цифра называется ***сомнительной.***

Например, в числе $\boldsymbol{a} = 27{,}4 \pm 0{,}08$ все цифры верные, так как $\boldsymbol{h} = 0.08 < 0.1$

в числе $\boldsymbol{a} = 9{,}746 \pm 0{,}04$ цифры 9 и 7 верные, поскольку $h = 0.04 < 0.1$, а цифры 4 и 5 сомнительные, так как $h = 0.04 > 0.01$.

Замечания.

1. Рекомендуется в записи приближённых чисел сохранять только верные цифры.
2. Если в десятичной дроби последние верные цифры – нули , то их оставляют в записи числа.

Например, если $\boldsymbol{a} = 0.26 \pm 0.0003$ то правильная запись числа есть 0,26

3. Если в целом числе последние нули являются сомнительными цифрами, то их исключают из записи числа.

Например, если а = 25000±25, то правильная запись числа есть $250 \cdot 10^3$

4. В записи числа а ≈ х последняя цифра десятичной записи числа указывает на точность приближения, т.е. граница абсолютной погрешности не превосходит единицы последнего разряда.

Например, запись числа $\alpha \approx 3.29$ означает, что $\alpha = 3.29 \pm 0.01$.

Значащими цифрами числа называют все его верные цифры, начиная с первой слева, отличной от нуля.

Например, в числе 1,13 - три значащие цифры , в числе 0,017- две, в числе 0,303- три, в числе 5,200- четыре, в числе $25 \cdot 10^3$ - две значащие цифры.

Абсолютная погрешность показывает, насколько точным является приближение в случае, если рассматривается несколько значений одной и той же величины. Лучшим приближением является то, у которого наименьшая абсолютная погрешность.

Относительной погрешностью $\boldsymbol{\omega}$ (омега) приближения х величины $\boldsymbol{\alpha}$ называется отношение абсолютной погрешности Δ этого приближения к модулю приближённого значения $\boldsymbol{x}$, т.е. $\omega = \frac{\Delta}{|x|}$ Обычно относительная погрешность выражается в процентах.

В расчётах, не требующих высокой точности, достаточно бывает обеспечить относительную погрешность порядка десятых долей процента, что гарантируется при вычислениях с тремя значащими цифрами. Этим объясняется широкое применение в технических расчётах.

Так как обычно точное значение величины $\boldsymbol{\alpha}$ а, следовательно, и погрешности Δ неизвестны, то на практике приходиться оценивать модуль относительной погрешности некоторым числом $\boldsymbol{\varepsilon}$ (эпсилон), которое заведомо не меньше этого модуля.: $|\omega| \leq \varepsilon$.

В качестве такого числа можно взять отношение $\frac{h}{|x|}$

Положительное число $\boldsymbol{\varepsilon}$ называют ***границей относительной погрешности***.

Пример 1. Сравнить качество измерений толщины книги d (в см.) и высоты стола H (в см.), если известно, что $d = 2 \pm 0.5$, $H = 100\pm0.5$.

Решение. Для сравнения качества измерений найдём относительную погрешность каждого измерения.

$\omega_d = 0.5/2=0.25=25\%$

$\omega_H =0.5/100=0.005=0.5\%$

Толщина книги измерена с относительной погрешностью до 25% , а высота стола – до 05%.

Качество измерения высоты стола намного лучше качества измерения толщины книги.

Действия над приближёнными значениями величин

Для того чтобы правильно производить действия над приближёнными значениями величин, надо уметь находить погрешности этих действий.

В таблице приведены формулы для оценки границ погрешностей результатов действий.

Производимое действие	**Граница абсолютной погрешности**	**Граница относительной погрешности**
$\alpha+b$	$h_{a+b} = h_a +h_b$	$\varepsilon_{a+b} = h_a +h_b / a +b$
$\alpha - b$	$h_{a-b} = h_a -h_b$	$\varepsilon_{a-b} = h_a – h_b / a- b$
$\alpha \cdot b$	$h_{a b}= h_a \mid b \mid + h_b \mid \alpha \mid \approx \alpha \cdot b\varepsilon_{\alpha b}$	$\varepsilon_{\alpha b} = h_{a b} / \alpha + h_b / b = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_b$
α/ b	$h_{a/ b}= (h_a \mid b \mid + h_b \mid \alpha \mid) / b^2 \approx$ $\approx \alpha/ b \cdot \varepsilon_{\alpha/b}$	$\varepsilon_{\alpha/b} = h_{a b} / \alpha + h_b / b = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_b$
α^n	$h_a^n = n \alpha^{n-1} h_a \approx \alpha^n{}_\varepsilon \alpha^n$	$\varepsilon_a^n = n h_a / \alpha = n \varepsilon_a$

При сложении и вычитании приближённых значений величин надо все данные округлить, сохранив в них столько десятичных знаков, сколько их в данном с наименьшим числом десятичных знаков.

Пример 2. Вычислить сумму приближённых чисел 0,6; 0,42; 0,286.Найти границу погрешности результата.

Решение. Округлим все данные, сохранив один десятичный знак, и выполним сложение: $0{,}6+0{,}42+0{,}286 \approx 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3 = 1{,}3$ Граница погрешности каждого слагаемого не превосходит единицы последнего разряда: тогда $h=0{,}1+0{,}01+0{,}001 = 0{,}111 \approx 0{,}2$

Граница погрешности суммы мало отличается от границы погрешности наименее точного слагаемого. Сумма равна $1{,}3 \pm 0{,}2$

При умножении и делении приближённых значений величин надо все данные округлить, сохранив в них столько значащих цифр, сколько их в данном с наименьшим числом значащих цифр; столько же значащих цифр оставить в результате действия.

Пример 3. Найти частное приближение чисел 654,1 и 8,5 и границу погрешности результата.

Решение. Округлим делимое, сохранив две значащие цифры, т. е. до десятков: $654{,}1 \approx 65\cdot 10$. Выполним деление и оставим в результате две значащие цифры: $654{,}1/ 8{,}5 \approx 65\cdot 10/8{,}5 \approx 76{,}5 \approx 77$.

Чтобы ответить на вопрос, с какой точностью найдено частное, сначала вычислим границу относительной погрешности результата.

$$\varepsilon = \frac{0{,}1}{654{,}1} + \frac{0{,}1}{8{,}5} \approx 0{,}00016 + 0{,}012 \approx 0{,}0122$$

Границу погрешности частного находим по формуле $\alpha/ b \cdot \varepsilon_{\alpha/b}$

$h = 77 \cdot 0.0122 = 0.9394 \approx 1$ Итак, частное равно 77 ± 1.

Пример 4. Вычислить приближённое значение числа 4,13 и оставляем в результате

три значащие цифры : $4{,}13^2 = 17{,}0569 \approx 17{,}1$ Относительную погрешность вычисления находим по формуле $\varepsilon_a^n = n\,\varepsilon_a$

$\varepsilon_{4,13} = 0{,}14/ 4{,}13 \approx 0{,}0025$ $\varepsilon_{4,13}^2 = 2 \cdot 0{,}0025 = 0{,}5\%$

Итак, $4{,}13^2 = 17{,}1$ с точностью до 0,5%

Замечание. Для более точных вычислений в результатах промежуточных действий рекомендуется сохранять одну запасную цифру, т.е. сохранять на один десятичный знак или на одну значащую цифру больше, чем рекомендует правило.

Пример 5. Вычислить приближённое значение выражения $x = 5.62^2 \cdot 5.34 / \sqrt{18.50}$

И найти границу погрешности результата.

Решение. $5,62^2 = 31,58$ $\sqrt{18,50} = 4,301$ $x = \frac{5.34 \cdot 31.58}{4.301} = 39.208 \approx 39.2$

где сначала выполнено деление, а затем умножение.

Найдём границу относительной погрешности результата.

$\varepsilon = \frac{0,01}{5,34} + 2 \cdot \frac{0,01}{18,50} = 0,0019 + 0,0036 + 0,00028 \approx 0,0058 = 0,58\% \approx 0,6\%$

Граница погрешности результата есть $h = 39,2 \cdot 0,0058 \approx 0,23 \approx 0,3$.

Итак $x = 39.2 \pm 0.3$.

Таким образом, обязательно следует учить студентов решать прикладные задачи с физическим, техническим, экономическим содержанием. . Круг приложений математики настолько широк, что всё равно не удастся рассмотреть их в достаточной полноте. С другой стороны, математика черпает идеи для своего дальнейшего развития именно из приложений. В 1267 году на этот вопрос английский философ Роджер Бэкон ответил так «Тот, кто не знает математики, не может знать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества».

Практическая работа №1

Вариант 1

1. Измеряют размер некоторой детали с точностью до 0,01 мм. По таблице допусков она должна иметь размер d= (50 ± 0,02) мм. Будут ли приняты детали размером 49,99; 50,01; 50,03 мм?
2. Дано число 3/7

а) Представьте его в виде десятичной дроби с точностью до 0,001.

в) Найдите абсолютную погрешность приближения

3. Даны приближённые числа: 1678 ± 6; 6,12 ± 0,07; 7,028 ± 0,08; 27,246 ± 0,

а) Укажите их верные цифры.

в) Округлите третье число, сохранив в нём только верные цифры, укажите его точность.

Вариант 2.

1. При обработке втулок на автоматическом станке их диаметр измеряется с точностью до 0,001 мм. По таблице допусков диаметр втулки должен иметь размер (2,100 ± 0,003) мм. Будут ли приняты втулки диаметром 2,101; 2,095; 2,097 мм?
2. Дано число $3\frac{1}{11}$.

а) Представьте его в виде десятичной дроби с точностью до 0,001.

в) Найдите абсолютную погрешность приближения .

3. Даны приближённые числа: 7341 ± 93; 61,73 ± 0,1; 71,319 ± 0,0003; 3,87 ±0,04.

а) Укажите их верные цифры.

в) Округлите последнее число, сохранив в нём только верные цифры, укажите их точность.

Вариант 3.

1. При обработке поршня на станке его диаметр измеряют с точностью до 0,001мм . По таблице допусков его диаметр должен иметь размер d=(75.200±0.002) мм. Будут ли приняты поршни диаметром 75,199; 75,197; 75,201 мм?
2. Дано число $\frac{7}{6}$

а) Представить его в виде десятичной дроби с точностью до 0,001.

в) Найдите абсолютную погрешность приближения.

3. Даны приближённые числа: 5294 ±97; 39,288±0,1; 0,875±0,0007; 2,177±0,04.

а) Укажите верные цифры этих чисел.

в) Округлите последнее число, сохранив в нём только верные цифры, укажите его точность.

Вариант 4.

1. Размер некоторой детали измеряют с точностью до 0,01мм. По таблице допусков она должна иметь размер d= (35,00±0,03) мм. Будут ли приняты детали размером 34,98; 35,03; 34,95 мм?
2. Дано число $\frac{5}{6}$

а) Представьте его в виде десятичной дроби с точностью дот 0,001.

в) Найдите абсолютную погрешность приближения.

3. Даны следующие приближённые числа: 72345±27; 2,874±0,003; 28,70±0,01 3,285±0,05.

а) Укажите верные цифры этих чисел.

в) Округлите последнее число, сохранив в нём только верные цифры, укажите его точность.

Практическая работа №2.

Вариант 1.

1. Дано число $3\frac{5}{9}$.

а) Представить его в виде десятичной дроби с точностью до 0,001

в) Найдите относительную погрешность приближения.

2. Вычислите:

а) с точностью до 0,001: $\frac{2,39137}{18,192}$; 5,2578 – 8,429;

в) $\frac{2,39137}{18,192}$ с относительной погрешностью, не превышающей 0,02.

3. Ускорение свободного падения равно (9,81 ±0,05) м/с^{2,} нормальное атмосферное давление (101326±2) Н/м^2. Что измерено с большей точностью?

Вариант 2.

1.Дано число $\frac{6}{7}$.

а) Представить его в виде десятичной дроби с точность 0,001.

в) Найдите относительную погрешность приближения.

2. Вычислите :

а) с точностью до 0,001: $\frac{3,71345}{24,237}$; 6,7213 -12,341.

в) $\frac{3,71345}{24,237}$ с относительной погрешностью , не превышающей 0,03.

3. Точка кипения ацетона равна (56,2$\pm$ 0,05)℃ а коэффициент поверхностного натяжения ацетона – (0,024 ±0,0003) Н/м. Что измерено с большей точностью?

Вариант 3.

1. Дано число $2\frac{4}{9}$.

а) Представьте его в виде десятичной дроби с точностью до 0,001

в) Найдите относительную погрешность приближения.

2. Вычислите:

а) с точностью до 0,001: $\frac{6,42831}{14,582}$; 5,3987 + 17,854 ;

в) $\frac{6,42831}{14,582}$ - с относительной погрешностью, не превышающей 0,05.

3. Масса железнодорожного вагона (63 ±0,5) т., а масса дозы лекарств (0,15±0,005) г. Что измерено с большей точностью?

Вариант 4.

1. Дано число $\frac{5}{7}$.

а) Представьте его в виде десятичной дроби с точностью до 0,001.

в) Найдите относительную погрешность приближения.

2. Вычислите:

а) с точностью до 0,001: $\frac{5,12793}{13875}$; 8,1293 + 39,938.

в) $\frac{5,12793}{13875}$ - с относительной погрешностью, не превышающей 0,03.

3. Температура плавления равна (660,4$\pm$0,06) ℃; а плотность сухого Воздуха (1,1273 ± 0,0003) кг/м^3 . Что измерено с большей точностью?

Контрольные вопросы

1. С какой точностью можно измерить;

а) длины с помощью ученической линейки;

в) температуру с помощью медицинского термометра?

2. Приближённое значение числа x равно 0,78, абсолютная погрешность меньше 0,03.Может ли точное значение x оказаться равным 0,75; 0,74; 0,76; 0,83?

3. Какая разница между двумя записями; « температура 37℃» и «температура 37,0℃»?

4. Сколько десятичных знаков в записи следующих приближённых чисел: 3,5; 0,47; 0,047; 78; Сколько в каждом из них значащих цифр?
5. Приведите примеры приближённых чисел, в которых количество десятичных знаков;
а) больше числа значащих цифр;
в) меньше числа значащих цифр;
с) равно числу значащих цифр.
6. Известно, что в записи числа 4,289 цифра 8 сомнительная. Будут ли сомнительными или верными цифры 4, 2, 9?
7. Что можно сказать о размерности абсолютной погрешности измерения?
8. Как целесообразно округлить следующие величины с избытком или недостатком; а) показания бытового электросчётчика;
в) массу приборов, устанавливаемых на космическом корабле;
с) максимальную нагрузку, которую может выдержать мост?
9. Каким способом округлены следующие величины:
а) масса Земли $5{,}98 \cdot 10^{24}$кг;
в) гравитационная постоянная $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Нм^2/ кг^2 $\approx 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/ кг$^{2;}$
г) отношение длины окружности к её диаметру $3{,}14159 \approx 3{,}14$?
10. Сколько требуется найти десятичных знаков числа, чтобы округлить его с точностью до0,001;
а) с недостатком;
в) с избытком;
с) с наименьшей погрешностью.

Список источников:

1. Прикладные задачи по алгебре. Ю.Ф. Фоминых. Издательство Москва «Просвещение» 1999г.
2. Математика. Сборник задач профильной направленности. М.И. Башмаков. Москва. Издательский центр «Академия» 2012год.
3. Методика обучения математике в средней школе. Г.И. Саранцев. Москва. «Просвещение» 2002 год.